数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

$\boxed{1}$ $a \neq 0$ とし，放物線 $y = a(x-1)^2 + \dfrac{1}{a}$ を C，直線 $y = x$ を L_1 とする。また，点 $(1, 0)$ を通り傾き m の直線を L_2 とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わるように a の値の範囲を求めよ。

(2) (1) において，放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さを ℓ とする。$\sqrt{2} \leqq \ell \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ となるように，a の値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 C と直線 L_2 が接するとき，m は a に無関係な値となることを示せ。またそのときの接点の座標を求めよ。

[解答欄]

(1)

x の二次方程式 $a(x-1)^2 + \frac{1}{a} = x$ が異なる二つの実数解を持つような a の範囲を求めればよい。 変形して

$$a^2x^2 - a(2a+1)x + a^2 + 1 = 0 \qquad \text{の判別式は、}$$

$a^2(2a+1)^2 - 4a^2(a^2+1) = a^2(4a-3)$ である。　判別式が正になる範囲は、 $4a - 3 > 0$ よって　$a > \frac{3}{4}$ である。

(2)

２つの交点の　x 座標をそれぞれ t, s とする。　直線 L_1 の傾きは 1 であることから、ℓ の長さは $\sqrt{2}|t-s|$ である。よって

$$\ell^2 = \{\sqrt{2}(t-s)\}^2 = 2\{(t+s)^2 - 4st\} = 2\left\{\left(\frac{2a+1}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\right\} = \frac{8a-6}{a^2}$$

従って　$2 \leqq \dfrac{8a-6}{a^2} \leqq \dfrac{5}{2}$ を満たす a の範囲を求めればよい。

$$a^2 - 4a + 3 \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad 5a^2 - 16a + 12 \geqq 0$$

より　$1 \leqq a \leqq \dfrac{6}{5}$ または　$2 \leqq a \leqq 3$ である。

(3)

接点（の一つ）を　(p, q) とすれば、その直線での接線の方程式は、

$$y = (2a(p-1))(x-p) + a(p-1)^2 + \frac{1}{a} \text{である。}$$

この直線は $(1, 0)$ を通るので

$$0 = (2a(p-1))(1-p) + a(p-1)^2 + \frac{1}{a} = -a(p-1)^2 + \frac{1}{a}$$

よって　$(p-1)^2 = \dfrac{1}{a^2}$　より $p = 1 \pm \dfrac{1}{a}$

したがって　$m = 2a(p-1) = \pm 2$ であり、　接点の座標は、$(p, q) = \left(1 + \dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right), \left(1 - \dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right)$ である。

数　　学

氏名	

受験番号	

2　△ ABC において，BC = 1，$\angle \mathrm{ABC} = 2\theta$，$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ であるとする。 AB の長さを x，AC の長さを y とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$ を θ を用いて表せ。

(2) $x\cos 2\theta + y\cos\theta$ は θ に無関係な値であることを示せ。

(3) x，y を θ を用いて表せ。

(4) $x = f(\theta)$，$y = g(\theta)$ とするとき，曲線 $x = f(\theta)$，$y = g(\theta)$ 上の点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right), g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ での接線の方程式を求めよ。

[解答欄]

(1)

A から BC へ引いた垂線の足を H とおく。　$\mathrm{AH} = x\sin 2\theta = y\sin\theta$ である。ゆえに $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$

(2)

$x\cos 2\theta + y\cos\theta = \mathrm{BC} = 1$ である。

(3)

(1) と (2) より　$1 = x(\cos 2\theta + \dfrac{y}{x}\cos\theta) = x(\cos 2\theta + 2\cos^2\theta) = x(4\cos^2\theta - 1)$ である。

よって

$x = \dfrac{1}{4\cos^2\theta - 1}$，　$y = x\cdot 2\cos\theta = \dfrac{2\cos\theta}{4\cos^2\theta - 1}$ を得る。

(4)

$f'(\theta) = \dfrac{-4\cdot 2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{(4\cos^2\theta - 1)^2} = \dfrac{8\sin\theta\cos\theta}{(4\cos^2\theta - 1)^2}$,

$g'(\theta) = \dfrac{-2\sin\theta(4\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta\cdot(-8\sin\theta\cos\theta)}{(4\cos^2\theta - 1)^2} = \dfrac{8\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta}{(4\cos^2\theta - 1)^2}$ であり,

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2},\quad g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{かつ}\quad f'(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad g'(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

であることから

$$y = \frac{g'(\frac{\pi}{6})}{f'(\frac{\pi}{6})}(x - f(\frac{\pi}{6})) + g(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ が求める接線の方程式である。

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

3　関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x について，不等式 $f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0,\ y = \dfrac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3)　(2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ より　$f(x)$ は　$x < 1$ で単調増加、$x > 1$ で単調減少である。

よって $f(x)$ は $x = 1$ で最大値 $f(1) = \frac{1}{e}$ をとることから、$f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つ。

(2)

$$
\begin{aligned}
D\text{の面積} &= 1 \times \frac{1}{e} - \int_0^1 f(x)dx \\
&= \frac{1}{e} - \int_0^1 x(-e^{-x})'dx \\
&= \frac{1}{e} + [xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + [e^{-x}]_0^1 = \frac{3}{e} - 1
\end{aligned}
$$

(3)

求める体積 $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ である。　$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ とおく。

$$I = \int_0^1 x^2 f'(x)dx = \int_0^1 x^2(e^{-x} - xe^{-x})dx = \int_0^1 x^2e^{-x}dx - \int_0^1 x^3e^{-x}dx$$

ここで

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{とおくと}$$

$$I_n = \int_0^1 x^n(-e^{-x})'dx = [-x^ne^{-x}]_0^1 + nI_{n-1} = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \quad \text{より}$$

$$I = I_2 - I_3 = I_2 - (-\frac{1}{e} + 3I_2) = \frac{1}{e} - 2I_2 = \frac{1}{e} - 2(-\frac{1}{e} + 2I_1) = \frac{3}{e} - 4I_1 = \frac{3}{e} - 4(-\frac{2}{e} + 1) = \frac{11}{e} - 4$$

よって　$V = \pi(\dfrac{11}{e} - 4)$

数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

4　A と B の 2 つの箱がある。最初に A には白球 2 個と赤球 1 個，B には白球 2 個が入っている。
次のステップで球を移動する。

ステップ 1： A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 2： B から 1 個を取り A に入れる。

ステップ 3： A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 4： B から 1 個を取り A に入れる。

以下同様に，ステップ 100 までを行う。

P_n $(1 \leqq n \leqq 50)$ を『ステップ $2n-1$ まではAもBも白球が3個にはならず, ステップ $2n$ で初めてAが白球3個になる』確率とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 および P_n をそれぞれ求めよ。

(2) $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n$ を求めよ。

(3) $\mathrm{P}_1 + 2\mathrm{P}_2 + \cdots + k\mathrm{P}_k + \cdots + n\mathrm{P}_n$ を求めよ。

[解答欄]

(1)

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9},\quad \mathrm{P}_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{81},\quad \mathrm{P}_n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9^n}$$

(2)

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9^k} = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{1}{9})^n}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

(3)

$\mathrm{S} = \mathrm{P}_1 + 2\mathrm{P}_2 + \cdots + k\mathrm{P}_k + \cdots + n\mathrm{P}_n$ とおく。

$$\mathrm{S} = \frac{2}{9} + 2\cdot\frac{2}{9^2} + 3\cdot\frac{2}{9^3} + \cdots + n\frac{2}{9^n}$$

$$\frac{1}{9}\mathrm{S} = 1\cdot\frac{2}{9^2} + 2\cdot\frac{2}{9^3} + \cdots + (n-1)\frac{2}{9^n} + n\frac{2}{9^{n+1}}$$　である。

このとき

$$\left(1-\frac{1}{9}\right)\mathrm{S} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9^2} + \frac{2}{9^3} + \cdots + \frac{2}{9^n} - n\frac{2}{9^{n+1}} = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\} - \frac{2n}{9^{n+1}}$$

したがって　$\mathrm{S} = \dfrac{9^{n+1}-9-8n}{32\cdot 9^n}$

数　　　学

氏名	

受験番号	

5　四面体 OABC において $\triangle$ ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ $(0<t<1)$ とする。さらに $\triangle$ ABP と線分 OG との交点を X とし，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $(0<s<1)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と t, s を用いて表せ。

(2) 2点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が AB の中点であることを証明せよ。

(3) $s=\dfrac{6}{7}$ のとき，t の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c}$

(2)

PX を延長した線分と AB との交点を M とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ となる $r>1$ が存在する。

(1) より　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\vec{c}+r(\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c})=\dfrac{rs}{3}\vec{a}+\dfrac{rs}{3}\vec{b}+\dfrac{r(s-3t)+3t}{3}\vec{c}$ である。

一方　M は AB 上にあることから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$　$(0\leqq k\leqq 1)$ と表せる。

よって　$\dfrac{rs}{3}=k,\quad \dfrac{rs}{3}=1-k,\quad r(s-3t)+3t=0$

したがって　$k=1-k$ であることから　$k=\frac{1}{2}$ となり　M は AB の中点である。

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ を2通りの表し方で表す。

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{MO}}+t\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ であり、$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ であることから $\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{MX}}$ となる $\ell>1$ が存在する。

係数を比較すると　$1-t=\dfrac{1}{7}\ell,\quad t=\dfrac{2}{7}\ell$ であることから、　$t=\frac{2}{3}$ を得る。