数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

$\boxed{1}$ $a \neq 0$ とし，放物線 $y = a(x-1)^2 + \dfrac{1}{a}$ を C，直線 $y = x$ を L_1 とする。また，点 $(1, 0)$ を通り傾き m の直線を L_2 とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わるように a の値の範囲を求めよ。

(2) (1) において，放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さを ℓ とする。$\sqrt{2} \leqq \ell \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ となるように，a の値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 C と直線 L_2 が接するとき，m は a に無関係な値となることを示せ。またそのときの接点の座標を求めよ。

[解答欄]

(1)

x の二次方程式 $a(x-1)^2 + \frac{1}{a} = x$ が異なる二つの実数解を持つような a の範囲を求めればよい。 変形して

$$a^2x^2 - a(2a+1)x + a^2 + 1 = 0 \qquad \text{の判別式は、}$$

$a^2(2a+1)^2 - 4a^2(a^2+1) = a^2(4a-3)$ である。　判別式が正になる範囲は、 $4a - 3 > 0$ よって　$a > \frac{3}{4}$ である。

(2)

2 つの交点の　x 座標をそれぞれ t, s とする。　直線 L_1 の傾きは 1 であることから、ℓ の長さは $\sqrt{2}|t-s|$ である。よって

$$\ell^2 = \{\sqrt{2}(t-s)\}^2 = 2\{(t+s)^2 - 4st\} = 2\left\{\left(\frac{2a+1}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\right\} = \frac{8a-6}{a^2}$$

従って　$2 \leqq \dfrac{8a-6}{a^2} \leqq \dfrac{5}{2}$ を満たす a の範囲を求めればよい。

$$a^2 - 4a + 3 \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad 5a^2 - 16a + 12 \geqq 0$$

より　$1 \leqq a \leqq \dfrac{6}{5}$ または　$2 \leqq a \leqq 3$ である。

(3)

接点（の一つ）を (p, q) とすれば、その直線での接線の方程式は、

$$y = (2a(p-1))(x-p) + a(p-1)^2 + \frac{1}{a} \text{である。}$$

この直線は $(1, 0)$ を通るので

$$0 = (2a(p-1))(1-p) + a(p-1)^2 + \frac{1}{a} = -a(p-1)^2 + \frac{1}{a}$$

よって　$(p-1)^2 = \dfrac{1}{a^2}$　より $p = 1 \pm \dfrac{1}{a}$

したがって　$m = 2a(p-1) = \pm 2$ であり、　接点の座標は、$(p, q) = \left(1 + \dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right), \left(1 - \dfrac{1}{a}, \dfrac{2}{a}\right)$ である。

数　　学

氏 名		受 験 番 号	

2　$\triangle$ ABC において，BC $=1$，$\angle$ABC $=2\theta$，$\angle$ACB $=\theta$ であるとする。 AB の長さを x，AC の長さを y とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{y}{x}$ を θ を用いて表せ。

(2) $x\cos 2\theta + y\cos\theta$ は θ に無関係な値であることを示せ。

(3) x，y を θ を用いて表せ。

(4) $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とするとき，曲線 $x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ 上の点 $\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\ g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$ での接線の方程式を求めよ。

[解答欄]

(1)

A から BC へ引いた垂線の足を H とおく。　AH $= x\sin 2\theta = y\sin\theta$ である。ゆえに $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$

(2)

$x\cos 2\theta + y\cos\theta = \mathrm{BC} = 1$ である。

(3)

(1) と (2) より　$1 = x(\cos 2\theta + \dfrac{y}{x}\cos\theta) = x(\cos 2\theta + 2\cos^2\theta) = x(4\cos^2\theta - 1)$ である。

よって

$x = \dfrac{1}{4\cos^2\theta - 1}$,　$y = x\cdot 2\cos\theta = \dfrac{2\cos\theta}{4\cos^2\theta - 1}$ を得る。

(4)

$f'(\theta) = \dfrac{-4\cdot 2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)}{(4\cos^2\theta-1)^2} = \dfrac{8\sin\theta\cos\theta}{(4\cos^2\theta-1)^2}$,

$g'(\theta) = \dfrac{-2\sin\theta(4\cos^2\theta-1) - 2\cos\theta\cdot(-8\sin\theta\cos\theta)}{(4\cos^2\theta-1)^2} = \dfrac{8\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta}{(4\cos^2\theta-1)^2}$ であり，

$$f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2},\quad g(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\quad \text{かつ}\quad f'(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad g'(\frac{\pi}{6}) = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

であることから

$$y = \frac{g'(\frac{\pi}{6})}{f'(\frac{\pi}{6})}(x - f(\frac{\pi}{6})) + g(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ が求める接線の方程式である。

数　学

氏名	

受験番号	

3 関数 $f(x) = xe^{-x}$ について以下の問いに答えよ。

(1) すべての実数 x について，不等式 $f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = 0,\ y = \dfrac{1}{e}$ で囲まれた部分 D の面積を求めよ。

(3) (2) の D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

[解答欄]

(1)

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$ より　$f(x)$ は　$x < 1$ で単調増加、$x > 1$ で単調減少である。
よって $f(x)$ は $x = 1$ で最大値 $f(1) = \frac{1}{e}$ をとることから、$f(x) \leqq \dfrac{1}{e}$ が成り立つ。

(2)

$$
\begin{aligned}
D\text{の面積} &= 1 \times \frac{1}{e} - \int_0^1 f(x)dx \\
&= \frac{1}{e} - \int_0^1 x(-e^{-x})'dx \\
&= \frac{1}{e} + [xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + [e^{-x}]_0^1 = \frac{3}{e} - 1
\end{aligned}
$$

(3)

求める体積 $V = \pi \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ である。　$I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} x^2 dy$ とおく。

$$I = \int_0^1 x^2 f'(x)dx = \int_0^1 x^2(e^{-x} - xe^{-x})dx = \int_0^1 x^2e^{-x}dx - \int_0^1 x^3e^{-x}dx$$

ここで

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{とおくと}$$

$$I_n = \int_0^1 x^n(-e^{-x})'dx = [-x^ne^{-x}]_0^1 + nI_{n-1} = -\frac{1}{e} + nI_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - \frac{1}{e} \quad \text{より}$$

$$I = I_2 - I_3 = I_2 - (-\frac{1}{e} + 3I_2) = \frac{1}{e} - 2I_2 = \frac{1}{e} - 2(-\frac{1}{e} + 2I_1) = \frac{3}{e} - 4I_1 = \frac{3}{e} - 4(-\frac{2}{e} + 1) = \frac{11}{e} - 4$$

よって　$V = \pi(\dfrac{11}{e} - 4)$

数　　学

氏 名	

受験番号	

4　A と B の 2 つの箱がある。最初に A には白球 2 個と赤球 1 個，B には白球 2 個が入っている。次のステップで球を移動する。

ステップ 1： A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 2： B から 1 個を取り A に入れる。

ステップ 3： A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 4： B から 1 個を取り A に入れる。

以下同様に，ステップ 100 までを行う。

P_n $(1 \leqq n \leqq 50)$ を『ステップ $2n-1$ までは A も B も白球が 3 個にはならず, ステップ $2n$ で初めて A が白球 3 個になる』確率とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 および P_n をそれぞれ求めよ。

(2) $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n$ を求めよ。

(3) $\dfrac{1643}{6573} < \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n$ を満たす自然数 n のうち最小のものを求めよ。

[解答欄]

(1)

$\mathrm{P}_1 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$,　$\mathrm{P}_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{81}$,　$\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9^n}$

(2)

$$\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9^k} = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{1}{9})^n}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

(3)

$\dfrac{1643}{6573} < \dfrac{1}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}$ となる最小の n $(n \leqq 50)$ を求める。

$1643\cdot 4\cdot 9^n < 6573(9^n - 1) \iff 6573 < 9^n$ であり

$9^4 = 6561$ であることから $n = 5$ である。

数　　　　学

氏 名	

受験番号	

5 四面体 OABC において △ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{c}$ $(0 < t < 1)$ とする。さらに △ABP と線分 OG との交点を X とし，$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $(0 < s < 1)$ とする。
このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t, s を用いて表せ。

(2) 2点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が AB の中点であることを証明せよ。

(3) $s = \dfrac{6}{7}$ のとき，t の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{c}$, $\quad \overrightarrow{\mathrm{OX}} = s\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{PX}} = \overrightarrow{\mathrm{OX}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{s}{3}\vec{a} + \dfrac{s}{3}\vec{b} + \dfrac{s-3t}{3}\vec{c}$

(2)

PX を延長した線分と AB との交点を M とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + r\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ となる $r > 1$ が存在する。

(1) より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\vec{c} + r(\dfrac{s}{3}\vec{a} + \dfrac{s}{3}\vec{b} + \dfrac{s-3t}{3}\vec{c}) = \dfrac{rs}{3}\vec{a} + \dfrac{rs}{3}\vec{b} + \dfrac{r(s-3t)+3t}{3}\vec{c}$ である。

一方　M は AB 上にあることから $\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = k\vec{a} + (1-k)\vec{b} \quad (0 \leqq k \leqq 1)$ と表せる。

よって $\quad \dfrac{rs}{3} = k, \quad \dfrac{rs}{3} = 1-k, \quad r(s-3t)+3t = 0$

したがって $\quad k = 1-k$ であることから $\quad k = \frac{1}{2}$ となり　M は AB の中点である。

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ を2通りの表し方で表す。

$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{MO}} + t\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{MX}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ であり、$\overrightarrow{\mathrm{MG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ であることから $\overrightarrow{\mathrm{MX}} = \frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{MX}}$ となる $\ell > 1$ が存在する。

係数を比較すると $\quad 1 - t = \dfrac{1}{7}\ell, \quad t = \dfrac{2}{7}\ell$ であることから、$\quad t = \frac{2}{3}$ を得る。