数　　　学

氏名	

受験番号	

$\boxed{1}$ $a \neq 0$ とし，放物線 $y = a(x-1)^2 + \dfrac{1}{a}$ を C， 直線 $y = x$ を L_1 とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 L_1 が異なる 2 点で交わるように a の値の範囲を求めよ。

(2) (1) において，放物線 C が直線 L_1 から切り取る線分の長さを ℓ とする。$\sqrt{2} \leqq \ell \leqq \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ となるように，a の値の範囲を求めよ。

[解答欄]

(1)

x の二次方程式 $a(x-1)^2 + \frac{1}{a} = x$ が異なる二つの実数解を持つような a の範囲を求めればよい。 変形して

$$a^2x^2 - a(2a+1)x + a^2 + 1 = 0 \qquad \text{の判別式は、}$$

$a^2(2a+1)^2 - 4a^2(a^2+1) = a^2(4a-3)$ である。　判別式が正になる範囲は、 $4a-3>0$ よって　$a > \frac{3}{4}$ である。

(2)

２つの交点の　x 座標をそれぞれ t, s とする。　直線 L_1 の傾きは 1 であることから、ℓ の長さは $\sqrt{2}|t-s|$ である。よって

$$\ell^2 = \{\sqrt{2}(t-s)\}^2 = 2\{(t+s)^2 - 4st\} = 2\left\{\left(\frac{2a+1}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\right\} = \frac{8a-6}{a^2}$$

従って　$2 \leqq \dfrac{8a-6}{a^2} \leqq \dfrac{5}{2}$ を満たす a の範囲を求めればよい。

$$a^2 - 4a + 3 \leqq 0 \quad \text{かつ} \quad 5a^2 - 16a + 12 \geqq 0$$

より　$1 \leqq a \leqq \dfrac{6}{5}$ または　$2 \leqq a \leqq 3$ である。

数　　　学

氏 名	

受 験 番 号	

2　$f(x)=x^3+ax^2+bx$ とし, 曲線 $y=f(x)$ を C とする。曲線 C の接線の傾きの最小値は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $b=\dfrac{a^2}{3}$ であることを示せ。

(2) 曲線 C を平行移動すると曲線 $y=x^3$ に一致することを示せ。

(3) $a=3$ のとき，曲線 C 上の点 $(-2,\ f(-2))$ における接線と曲線 C で囲まれる図形の面積を求めよ。

[解答欄]

(1)

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ とおく。

$f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^2-\dfrac{a^2}{3}+b$　の最小値が 0 であることから、$-\dfrac{a^2}{3}+b=0$

よって　$b=\dfrac{a^2}{3}$ である。

(2)

$x^3+ax^2+\dfrac{a^2}{3}x=\left(x+\dfrac{a}{3}\right)^3-\dfrac{a^3}{27}$

と変形できることから x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$, y 軸方向に $\dfrac{a^3}{27}$ 平行移動すると $y=x^3$ になる。

(3)

$a=3$ より、$f(x)=x^3+3x^2+3x,\ \ f'(x)=3(x+1)^2,\ \ f(-2)=-2$　であることから、

$(-2,\ f(-2))$ における接線の方程式は　$y=3(x+2)-2=3x+4$。

曲線 C とこの接線との交点は、 $x^3+3x^2+3x=3x+4$ の解を求めて $(x+2)^2(x-1)=0$ より、$x=1$ である。

従って求める面積は

$$\int_{-2}^{1}\{3x+4-(x^3+3x^2+3x)\}dx=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx=\left[-\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

である。

数　　学

氏 名	

受 験 番 号	

3　座標平面上で，自然数 n に対し単位円上の点 $\left(\cos(\sqrt{2}\pi n),\ \sin(\sqrt{2}\pi n)\right)$ を P_n とおく。原点を O とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\,\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を求めよ。

(2) 自然数 n と m が異なるならば，点 P_n と P_m は異なることを示せ 。

[解答欄]

(1)

$\mathrm{P}_n = (\cos\sqrt{2}n\pi,\ \sin\sqrt{2}n\pi)$,　 $\mathrm{P}_{n+1}= (\cos\sqrt{2}(n+1)\pi,\ \sin\sqrt{2}(n+1)\pi)$ であることから

$\angle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{OP}_n = \sqrt{2}(n+1)\pi - \sqrt{2}n\pi = \sqrt{2}\pi$ である。

よって

$\triangle\,\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積$=\dfrac{1}{2}\sin(\sqrt{2}\pi-\pi) = -\dfrac{\sin\sqrt{2}\pi}{2}$

(2)

$n \neq m$ かつ　$P_n = P_m$ と仮定して矛盾をみちびく。

$$
\begin{aligned}
&P_n = P_m \\
\Longleftrightarrow\ &\cos\sqrt{2}n\pi = \cos\sqrt{2}m\pi \text{かつ} \sin\sqrt{2}n\pi = \sin\sqrt{2}m\pi \\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{2}n\pi - \sqrt{2}m\pi = 2\pi k \text{ となる整数 } k \text{ が存在する。} \\
\Longrightarrow\ &\sqrt{2} = \frac{2k}{n-m} \quad \text{（整数 } n-m \neq 0 \text{ かつ 整数 } k \text{ が存在する。）}
\end{aligned}
$$

これは $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

数　　　学

氏 名	

受験番号	

4　A と B の 2 つの箱がある。最初に A には白球 2 個と赤球 1 個，B には白球 2 個が入っている。
次のステップで球を移動する。
ステップ 1：　A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 2：　B から 1 個を取り A に入れる。
ステップ 3：　A から 1 個を取り B に入れる。　ステップ 4：　B から 1 個を取り A に入れる。
以下同様に，ステップ 100 までを行う。
P_n $(1 \leqq n \leqq 50)$ を『ステップ $2n-1$ までは A も B も白球が 3 個にはならず, ステップ $2n$ で初めて A が白球 3 個になる』確率とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) P_1，P_2 および P_n をそれぞれ求めよ。

(2) $\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\cdots+\mathrm{P}_n$ を求めよ。

(3) $\dfrac{1643}{6573}<\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\cdots+\mathrm{P}_n$ を満たす自然数 n のうち最小のものを求めよ。

[解答欄]

(1)
$\mathrm{P}_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,　$\mathrm{P}_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{81}$,　$\mathrm{P}_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9^n}$

(2)
$$\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2+\cdots+\mathrm{P}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{9^k}=\frac{2}{9}\frac{1-(\frac{1}{9})^n}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

(3)
$\dfrac{1643}{6573}<\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^n\right\}$ となる最小の n $(n \leqq 50)$ を求める。

$1643\cdot 4\cdot 9^n<6573(9^n-1)\Longleftrightarrow 6573<9^n$ であり

$9^4=6561$ であることから $n=5$ である。

数　　学

氏名	

受験番号	

5 四面体 OABC において △ABC の重心を G とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。辺 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$ $(0<t<1)$ とする。さらに △ABP と線分 OG との交点を X とし，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ $(0<s<1)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と t, s を用いて表せ。

(2) 2点 P, X を結ぶ直線と線分 AB との交点 M が AB の中点であることを証明せよ。

(3) $s=\dfrac{6}{7}$ のとき，t の値を求めよ。

[解答欄]

(1)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=s\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c}$

(2)

PX を延長した線分と AB との交点を M とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+r\overrightarrow{\mathrm{PX}}$ となる $r>1$ が存在する。

(1) より　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\vec{c}+r(\dfrac{s}{3}\vec{a}+\dfrac{s}{3}\vec{b}+\dfrac{s-3t}{3}\vec{c})=\dfrac{rs}{3}\vec{a}+\dfrac{rs}{3}\vec{b}+\dfrac{r(s-3t)+3t}{3}\vec{c}$ である。

一方　M は AB 上にあることから　$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\vec{a}+(1-k)\vec{b}$　$(0\leqq k\leqq 1)$ と表せる。

よって　$\dfrac{rs}{3}=k$,　$\dfrac{rs}{3}=1-k$,　$r(s-3t)+3t=0$

したがって　$k=1-k$ であることから　$k=\frac{1}{2}$ となり　M は AB の中点である。

(3)

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ を2通りの表し方で表す。

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{MO}}+t\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ であり、$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ であることから $\overrightarrow{\mathrm{MX}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{MO}}+\frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{MC}}$ である。

このとき

$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\ell\overrightarrow{\mathrm{MX}}$ となる $\ell>1$ が存在する。

係数を比較すると　$1-t=\dfrac{1}{7}\ell$,　$t=\dfrac{2}{7}\ell$ であることから、　$t=\frac{2}{3}$ を得る。