医 1

数　　学

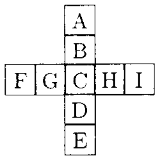
氏名	

受験番号	

1　AからIまでの文字が書かれた9枚の同じ大きさの正方形のカードが，右下図のように隙間なく並べられている。あるカードの上に置かれた玉Qは，1秒ごとに，玉Qが置かれているカードに隣接する上下左右のカードのどれかに移動する。n は自然数とし，Xと書かれたカードに置かれた玉Qが，n 秒後にYと書かれたカードにあるとき，そこまでの経路の総数を $N(\mathrm{X},\mathrm{Y},n)$ で表す。たとえば，$N(\mathrm{A},\mathrm{B},1)$ は，1秒ごとのカード間の移動を → で表すならば，A→Bの経路のみで1となり，$N(\mathrm{A},\mathrm{B},3)$ は，A→B→A→B，A→B→C→Bの2つの経路があるので2となる。以下の問に答えよ。

(1) n は自然数とする。$N(\mathrm{C},\mathrm{E},2n)$ を求めよ。

(2) n は2以上の自然数とする。$N(\mathrm{A},\mathrm{E},2n)$ を求めよ。



[解答欄]

(1) 玉Qが $2n$ 秒後にEにある場合，その1秒前には必ずDにあり，その1秒前にはCまたはEにあるので，

$N(C,E,2n) = N(C,D,2n-1) = N(C,C,2n-2) + N(C,E,2n-2)$ …①

玉Qが $2n$ 秒後にCにある場合，その1秒前には，B, G, H, Dのどれかにあるので

$N(C,C,2n) = N(C,B,2n-1) + N(C,G,2n-1) + N(C,D,2n-1) + N(C,H,2n-1)$ …②

ここで対称性より②の右辺4項はすべて等しい（右下図形を90°ずつ回転したと思えばよい．正確には帰納法で（最後に記入））．

よって②は

$N(C,C,2n) = 4N(C,D,2n-1) \overset{①の第1等号より}{=} 4N(C,E,2n)$ …③

そこで数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を $N(C,E,2n) = a_n$, $N(C,C,2n) = b_n$ で定める。

①③より $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$，$b_n = 4a_n$　ゆえに $a_n = 5a_{n-1}$。

$a_1 = N(C,E,2) = 1$ より $a_n = N(C,E,2n) = 5^{n-1}$.

(2) $N(A,E,2n)$ の内訳は，AB間の往復回数ごとに，

A→B→C（計2秒）→ 残りの $2n-2$ 秒でEに移ればよいので $N(C,E,2n-2)$

A→B→A→B→C（計4秒）→ 〃 $2n-4$ 秒で 〃　〃　$N(C,E,2n-4)$

⋮　　⋮

A→B→A→…→B→C（計 $2n-2$ 秒）→ 〃 2秒で 〃　$N(C,E,2)$

したがって $N(A,E,2n) = \sum_{k=1}^{n-1} N(C,E,2k) = \sum_{k=1}^{n-1} 5^{k-1} = \frac{1-5^{n-1}}{1-5} = \frac{1}{4}(5^{n-1}-1)$

註）②の右辺4項がすべて等しい：$N(C,B,2n-1) = N(C,G,2n-1) = N(C,D,2n-1) = N(C,H,2n-1)$ …④ の帰納法による証明．

$n=1$ のとき各項 $=1$ で成立，$n=k$ のとき④が成立と仮定　このとき

$N(C,B,2k+1) = \underbrace{N(C,C,2k)}_{\shortparallel} + \underbrace{N(C,A,2k)}_{= N(C,B,2k-1)}$

$= N(C,B,2k-1) + N(C,G,2k-1) + N(C,D,2k-1) + N(C,H,2k-1) \overset{帰納法の仮定}{=} 4N(C,B,2k-1)$

よって $N(C,B,2k+1) = 5N(C,B,2k-1)$

同様に $N(C,X,2k+1) = 5N(C,X,2k-1)$　$X = G, D, H$ より $n=k+1$ でも④は成立．

（(1)の $N(C,E,2n) = N(C,D,2n-1) = 5^{n-1}$ も導出可）

得点	

医 2

数　　学

氏名	

受験番号	

2 p, q を実数の定数とする。x についての整式 $A(x)$ と $B(x)$ を

$$A(x) = x^4 + 2px^3 + 4x^2 + qx + p + 2, \qquad B(x) = x^3 + 2px^2 + 3x - 2p + q$$

とおく。$A(x)$ を $B(x)$ で割った余りを $R(x)$ とし，$B(x)$ を $R(x)$ で割った余りを $S(x)$ とする。以下の問に答えよ。ただし，方程式の解は複素数の範囲で考えることにする。

(1) $R(x)$ と $S(x)$ を求めよ。

(2) α を複素数とする。$R(\alpha) = S(\alpha) = 0$ は，$A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ であるための必要十分条件であることを示せ。

(3) $p = 3$ とする。2つの方程式 $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ が共通の解を少なくとも1つもつような定数 q の値をすべて求めよ。

(4) 方程式 $R(x) = 0$ が実数解をもたないように，定数 p の値の範囲を定めよ。さらに p がその範囲にあるとき，2つの方程式 $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ が共通の解を少なくとも1つもつように，定数 p, q の値を定めよ。

［解答欄］

(1)

$$\begin{array}{r} x \\ x^3+2px^2+3x-2p+q \,\big)\, x^4+2px^3+4x^2+qx+p+2 \\ -\big)\, x^4+2px^3+3x^2-2px+qx \\ \hline x^2+2px+p+2 = R(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \\ x^2+2px+p+2 \,\big)\, x^3+2px^2+3x-2p+q \\ -\big)\, x^3+2px^2+(p+2)x \\ \hline (1-p)x-2p+q = S(x) \end{array}$$

(2) (1)より $A(x) = xB(x) + R(x) \cdots$ ①，$B(x) = xR(x) + S(x) \cdots$ ②

<u>必要性</u> $A(\alpha) = B(\alpha) = 0 \cdots (*)$ を仮定する。①より $\alpha B(\alpha) + R(\alpha) = 0 \cdots$ ③

②より $\alpha R(\alpha) + S(\alpha) = 0 \cdots$ ④．$(*)$ と ③ から $R(\alpha) = 0$. よって ④ から $S(\alpha) = 0$.

<u>十分性</u> $R(\alpha) = S(\alpha) = 0 \cdots (**)$ を仮定する。② で $x = \alpha$ とおくことにより $(**)$ を用いて，$B(\alpha) = \alpha R(\alpha) + S(\alpha) = 0 \cdots$ ⑤　さらに ① で $x = \alpha$ とおき $(**)$ と ⑤ を用いて

$A(\alpha) = \alpha B(\alpha) + R(\alpha) = 0$

(3) (2)より $p = 3$ のとき $R(x) = 0$ と $S(x) = 0$ が共通解を少なくとも1つもてばよい。

$R(x) = x^2 + 6x + 5 = (x+1)(x+5) = 0$ より $x = -1, -5$.

$S(x) = -2x - 6 + q$ より，$x = -1$ が共通解であるためには，$S(-1) = -4 + q = 0$

すなわち，$q = 4$，$x = -5$ が共通解であるためには，$S(-5) = 4 + q = 0$ ∴ $q = -4$.

以上より $q = \pm 4$.

(4) $R(x) = 0$ が実数解をもたない $\iff$ 判別式 $p^2 - p - 2 = (p-2)(p+1) < 0$

よって $-1 < p < 2$．$A(x) = 0$, $B(x) = 0$ が共通解 α をもつのは，(2)より，$R(x) = 0$, $S(x) = 0$ が共通解 α をもつときである。$R(x) = 0$ は実数解をもたないので，α は虚数である。$S(x) = 0$ は $p \neq 1$ のとき実数解 $(2p - q)/(1-p)$ のみをもつので $p = 1$. このとき $q = 2$ であれば $S(x) = 0$ はすべての複素数を解にもち，$q \neq 2$ であれば $S(x) = 0$ は解なしとなる。

したがって，$p = 1$, $q = 2$ のとき，$R(x) = 0$, $S(x) = 0$ は共通な虚数解をもち，よって (2)より $A(x) = 0$, $B(x) = 0$ は共通な解をもつ。∴ $p = 1$, $q = 2$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

3　六角錐 O-ABCDEF は，底面 ABCDEF が各辺の長さ 1 の正六角形で，OA = OB = OC = OD = OE = OF = 2 を満たすとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{e}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

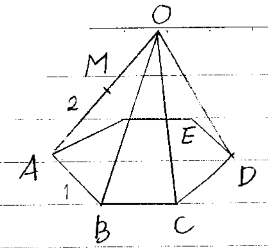
(2) $\vec{b}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{e}$ を用いて表せ。

辺 OA の中点を M とし，辺 OB 上に点 P を，MP + PC が最小になるようにとる。

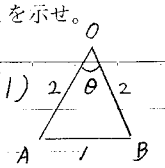
(3) OP の長さを求めよ。

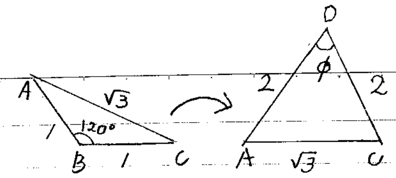
(4) P は 3 点 M，C，E の定める平面上にないことを示せ。

[解答欄]



(1)





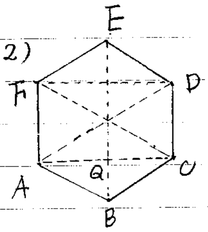
$1^2=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\theta$ より

$\cos\theta=\frac{7}{8}$ ∴ $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot2\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{2}$

$3=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cos\phi$

$\cos\phi=\frac{5}{8}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=2\cdot2\cdot\frac{5}{8}=\frac{5}{2}$

(2)

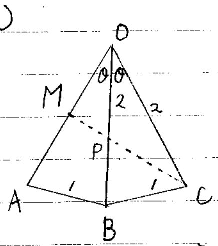


ACの中点Qに対し　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})$

$\overrightarrow{QB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OE})=\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}\vec{e}$

ゆえに $\vec{b}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QB}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{1}{3}\vec{e}$

(3)



MP+PCが最小となるのは，左の展開図において PがMC上にあるときである。このときPは△OACの重心となるので，OBとACの交点をRとしたとき $OP=\frac{2}{3}OR$．△ORAは∠ORA=90°の直角三角形だから，$OR=OA\cos\theta=2\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{4}$ ∴ $OP=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{6}$

(展開図において　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ と $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=4\cos2\theta$ から $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}}$ より求めることもできる。 展開図における$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$は，(1)の$\vec{a}$，$\vec{c}$と異なることに注意。)

(4)　Pが平面MCE上にある ⟺ $\overrightarrow{MP}=s\overrightarrow{MC}+t\overrightarrow{ME}$ …① をみたす実数s,tが存在する。

を用いる。①の左辺について：(3)(2)より $\overrightarrow{OP}=\frac{7/6}{2}\vec{b}=\frac{7}{12}\vec{b}=\frac{7}{18}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{7}{36}\vec{e}$　②

よって $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-1}{9}\vec{a}+\frac{7}{18}\vec{c}-\frac{7}{36}\vec{e}$

①の右辺は $s(\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a})+t(\vec{e}-\frac{\vec{a}}{2})=-\frac{s+t}{2}\vec{a}+s\vec{c}+t\vec{e}$．

OACEは同一平面上にないので　$\frac{-1}{9}=-\frac{s+t}{2}$，$\frac{7}{18}=s$，$\frac{-7}{36}=t$

が満たされねばならないが，

$s=\frac{7}{18}$，$t=\frac{-7}{36}$ のとき　$-\frac{s+t}{2}=-\frac{7}{72}\neq\frac{-1}{9}$．よって①をみたす実数s,tは存在しない。

(4)別解　①より $\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OM}+s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OE}=(1-s-t)\frac{\vec{a}}{2}+s\vec{c}+t\vec{e}$ ―③

一方②より $\overrightarrow{OP}=\frac{7}{9}\frac{\vec{a}}{2}+\frac{7}{18}\vec{c}-\frac{7}{36}\vec{e}$．$s=\frac{7}{18}$　$t=\frac{-7}{36}$ としても $1-s-t=\frac{29}{36}\neq\frac{7}{9}$

よって②の$\overrightarrow{OP}$は平面MCE上にない。

得点	

医 4

数　　学

氏名	

受験番号	

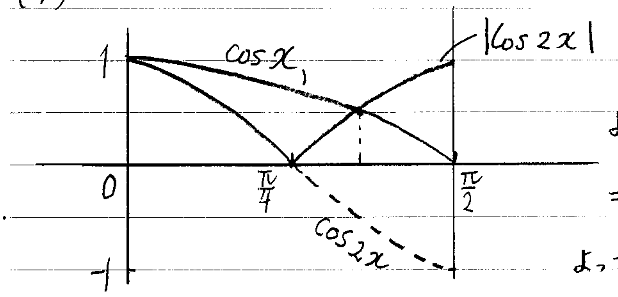
4　以下の問に答えよ。

(1) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，２つの関数 $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフのみで囲まれた部分の面積，および２つの関数 $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフと直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積の和を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において，２つの関数 $y=\cos x$，$y=\cos 2x$ のグラフと直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに１回転させてできる立体の体積を求めよ。

［解答欄］

(1)



$0<x<\frac{\pi}{2}$ における $y=\cos x=|\cos x|$ と $y=|\cos 2x|$ との交点の x 座標は左図より $\cos x=-\cos 2x$ を満たす。右辺 $-\cos 2x=1-2\cos^2 x$ であるから，$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

よって $\cos x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{3}$ である。

$$\overset{①}{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\cos 2x)\,dx}+\overset{②}{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x+\cos 2x)\,dx}+\overset{③}{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2x-\cos x)\,dx}$$

$$=\left[\sin x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/4}+\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\left[\frac{\sin 2x}{2}+\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{2}\right)-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}-2$$

（上記①②が $y=|\cos x|$，$y=|\cos 2x|$ のグラフのみで囲まれた部分の面積，
③が 〃 〃 と直線 $x=\frac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積）

(2) 回転体は，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ では内側が $y=\cos 2x$ の回転面，外側が $y=\cos x$ の回転面，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ では外側が $y=\cos x$ で，内側はつまっている，$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ では外側が $y=\cos 2x$ で内側はつまっている。よって　体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x-\cos^2 2x)\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\,dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x\,dx$$

ここで $\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$，$\cos^2 2x=\frac{\cos 4x+1}{2}$，$\cos^2 x-\cos^2 2x=\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}$ より

$$V=\pi\left[\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\pi\left[\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\pi\left[\frac{\sin 4x}{8}+\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi\cancel{\frac{1}{4}}+\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\cancel{\frac{\pi}{6}}-\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{\pi}{8}\right)+\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{3}}{16}-\cancel{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

5　n は自然数とし，a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数とする。$I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^a (a-x)^n e^x\,dx$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。

(1) I_1 を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

(3) I_{n+1} を I_n を用いて表せ。

(4) (3) までの結果を用いて，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ の和を求めよ。

[解答欄]

(1) $I_1 = \displaystyle\int_0^a (a-x)e^x dx = \Big[(a-x)e^x\Big]_0^a + \int_0^a e^x dx$

$= -a + \Big[e^x\Big]_0^a = e^a - a - 1$

(2) $0 \leqq x \leqq a$ のとき $0 \leqq (a-x) \leqq a$ よって $0 \leqq (a-x)^n \leqq a^n \leqq 1$.

↑ $0<a\leqq1$ より

$e^x > 0$ より $0 \leqq (a-x)^n e^x \leqq e^x$.

また $n! \geqq n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より $\dfrac{1}{n!} \leqq \dfrac{1}{n}$. したがって

$0 \leqq I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^a (a-x)^n e^x dx \leqq \frac{1}{n}\int_0^a e^x dx = \frac{1}{n}(e^a - 1) \to 0\ (n\to\infty)$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

(3) $I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^a (a-x)^{n+1} e^x dx = \frac{1}{(n+1)!}\left\{\Big[(a-x)^{n+1}e^x\Big]_0^a\right.$

$\left. + (n+1)\displaystyle\int_0^a (a-x)^n e^x dx\right\} = \dfrac{-a^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$

(4) $I_{n+1} - I_n = \dfrac{-a^{n+1}}{(n+1)!}$ は $\{I_n\}$ の階差数列となるから

$I_n = I_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{-a^{k+1}}{(k+1)!} = e^a - a - 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$

ここで $n\to\infty$ とすると，(2) より

$0 = e^a - a - 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} = e^a - 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$

$= e^a - 1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$

したがって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = e^a - 1$

得点	