数　　学

氏名

受験番号

1　1個のさいころを3回続けて投げるとき，出た目の数を順に a，b，c とおく。以下の問に答えよ。

(1) a，b，c のうち，少なくとも2つは偶数である確率を求めよ。

(2) 積 abc が60である確率を求めよ。

(3) 2次方程式 $x^2-(a+b)x+c=0$ が虚数解をもつ確率を求めよ。

［解答欄］

(1) 3回さいころを投げるとき，目の出方は全部で 6^3 通り。

その中，偶数が2回，奇数が1回出る場合は，${}_3C_1\cdot 3\times3\times3=3^4$ 通り

偶数が3回出る場合は $3\times3\times3=3^3$ 通り

よって求める確率は $\dfrac{3^4+3^3}{6^3}=\dfrac{3+1}{2^3}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

(1) 別解　a, b, c が偶数か奇数かはいずれも $\frac{1}{2}$ の確率なので，

$$\underbrace{{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1}_{\text{偶数が2回, 奇数が1回}}+\underbrace{{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3}_{\text{偶数が3回}}=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

(2) $abc=60$ となるのは，a, b, c が組として $\{2, 5, 6\}$ または

$\{3, 4, 5\}$ となる場合である。各場合につき，$3\times2\times1=6$ 通りある。

ゆえに求める確率は $\dfrac{6+6}{6^3}=\dfrac{12}{6^3}=\dfrac{1}{18}$.

(3) 判別式が負，すなわち $(a+b)^2<4c$ のときである。

$1\leqq c\leqq 6$ に注意し，$c=1$ のとき これをみたす (a, b) は存在しない。

$c=2$ のとき，$(a+b)^2<8 \Rightarrow a+b=2 \Rightarrow (a, b)=(1, 1)$ の1通り

$c=3$ のとき $(a+b)^2<12 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow (a, b)=(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の3通り

$c=4$ のとき $(a+b)^2<16 \Rightarrow a+b=2$ または $3 \Rightarrow$ 上の3通り

$c=5$ のとき $(a+b)^2<20 \Rightarrow a+b=2, 3,$ または $4 \Rightarrow$ 上の3通りと $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ とで6通り.

$c=6$ のとき $(a+b)^2<24 \Rightarrow a+b=2, 3$ または $4 \Rightarrow$ 上の6通り

よって全部で $1+3+3+6+6=19$ 通り

ゆえに求める確率は $\dfrac{19}{6^3}=\dfrac{19}{216}$

得点

数　　学

氏名	

受験番号	

2　a，b，c を実数の定数とする。x についての整式 $A(x)$ と $B(x)$ を

$$A(x) = x^3 - 3ax^2 + 3bx + c, \qquad B(x) = x^2 - 2ax + b$$

とおく。3 次方程式 $A(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつとし，$A(x)$ を $x + 1$ で割った商を $Q(x)$ とする。以下の問に答えよ。

(1) $Q(x)$ を求めよ。また，c を a と b を用いて表せ。

(2) 方程式 $Q(x) = 0$ が実数解をもつとき，方程式 $B(x) = 0$ も実数解をもつことを示せ。

(3) 2 つの方程式 $Q(x) = 0$，$B(x) = 0$ がともに $x = a + 1$ を解にもつとき，定数 a の値を求めよ。

[解答欄]

(1) $A(-1) = -1 - 3a - 3b + c = 0$　よって $c = 3a + 3b + 1$ …… ①

$x^2 - (3a+1)x + 3a + 3b + 1 = Q(x)$

$x+1 \,)\, x^3 - 3ax^2 + 3bx + c$

$x^3 + x^2$

$(-3a-1)x^2 + 3bx + c$

$(-3a-1)x^2 - (3a+1)x$

$(3a+3b+1)x + c$

$(3a+3b+1)x + 3a + 3b + 1$

$c - 3a - 3b - 1$ ← ①よりゼロ

(2) $Q(x) = 0$ が実数解をもつ $\Leftrightarrow (3a+1)^2 - 4(3a+3b+1) = 9a^2 - 6a - 12b - 3 \geqq 0$

すなわち $3a^2 - 2a - 4b - 1 \geqq 0$ …… ②

$B(x) = 0$ が実数解をもつ $\Leftrightarrow a^2 - b \geqq 0$ …… ③

示すべきことは，② ⇒ ③ なので，②より $b \leqq \frac{1}{4}(3a^2 - 2a - 1)$

このとき③の左辺は

$a^2 - b \geqq a^2 - \frac{1}{4}(3a^2 - 2a - 1) = \frac{1}{4}(a^2 + 2a + 1) = \frac{1}{4}(a+1)^2 \geqq 0$

よって②を仮定すれば，③が成立する

(3)

$Q(a+1) = 0$ より $(a+1)^2 - (3a+1)(a+1) + 3a + 3b + 1 = -2a^2 + a + 3b + 1 = 0$ …… ④

$B(a+1) = 0$ より $(a+1)^2 - 2a(a+1) + b = -a^2 + b + 1 = 0$ …… ⑤

⑤より $b = a^2 - 1$，④に代入し，

$-2a^2 + a + 3(a^2 - 1) + 1 = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) = 0$

$\therefore a = -2, 1$.

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

3 数列 $\{a_n\}$ は次の条件によって定められている。

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{n+1}{3n}a_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以下の問に答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

[解答欄]

(1) $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{3}{6}a_2 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{4}{9}a_3 = \frac{8}{27}$

(2) $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3}\frac{a_n}{n}$ から $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと, $\{b_n\}$ は初項2 公比 $\frac{1}{3}$

の等比数列となる。ゆえに $b_n = 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $a_n = nb_n = 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)別解 $a_n = \frac{1}{3}\frac{n}{n-1}a_{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)}a_{n-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{n(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}a_{n-3}$

$= \cdots = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cdots\cancel{2}}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\cdots 1}a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot n\cdot 2$

(3) $S = 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k$

両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けると

$\frac{1}{3}S = 2\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

辺々引くと

$\frac{2}{3}S = 2\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$= \underbrace{2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}_{} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = 3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

よって $S = \frac{9}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - 3n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{9}{2} - \left(\frac{9}{2} + 3n\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

得点	

数　　学

氏名	

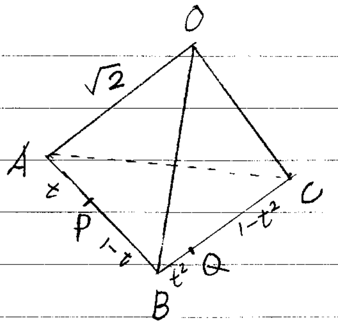
受験番号	

4　1辺の長さが $\sqrt{2}$ の正四面体 OABC がある。辺 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 BC を $t^2:(1-t^2)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす実数とする。以下の問に答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ を t を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ の最大値と，そのときの実数 t の値を求めよ。

[解答欄]



(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく．このとき

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=(1-t^2)\vec{b}+t^2\vec{c}$,

OABC は1辺の長さ $\sqrt{2}$ の正四面体であるので，

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ \text{同様に } \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1\text{，また } |\vec{b}|=\sqrt{2}\end{array}\right\}(*)$$

よって $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left((1-t)\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left((1-t^2)\vec{b}+t^2\vec{c}\right)$

$=(1-t)(1-t^2)\vec{a}\cdot\vec{b}+t(1-t^2)|\vec{b}|^2+(1-t)t^2\vec{a}\cdot\vec{c}+t^3\vec{b}\cdot\vec{c}$

(*)より $=(1-t)(1-t^2)+2t(1-t^2)+(1-t)t^2+t^3$

$=t^3-t^2-t+1+2t-2t^3+t^2-t^3+t^3=-t^3+t+1$

(2) $f(t)=-t^3+t+1$ とおいて $0<t<1$ の範囲での最大値を調べる．

$f'(t)=-3t^2+1=-3\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗		↘	

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ は最大値

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+1$

$=\frac{2\sqrt{3}}{9}+1$ をとる。

得点	

数　学

氏名	

受験番号	

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので，どちらか１題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

5　xy 平面上において，連立不等式

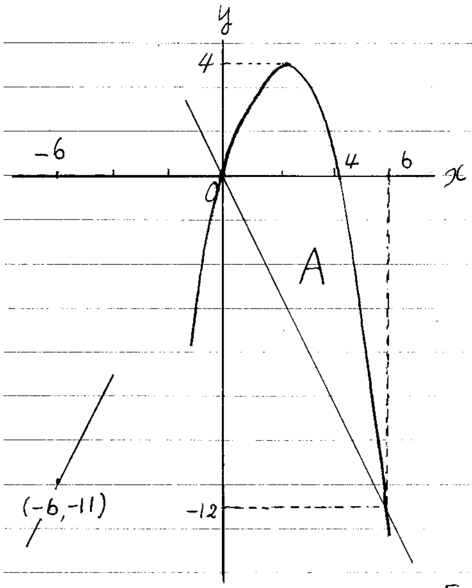
$$y \leqq -x^2+4x, \qquad 2x+y \geqq 0$$

の表す領域を A とする。以下の問に答えよ。

(1) 領域 A の面積を求めよ。

(2) 点 (x, y) が領域 A を動くとき，$\dfrac{y+11}{x+6}$ の最大値と最小値を求めよ。

［解答欄］



(1) 放物線 $y=-x^2+4x$ と

直線 $2x+y=0$ との交点は，

$-x^2+4x=-2x$ より

$x^2-6x=x(x-6)=0$.

$\rightarrow \begin{cases} x=0, & このとき\ y=0 \\ x=6 & このとき\ y=-12 \end{cases}$ から

$(0,0)$, $(6,-12)$ となる。

よって領域 A の面積は

$$\int_0^6 -x^2+4x-(-2x)\,dx=\int_0^6 -x^2+6x\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2\right]_0^6=-72+108=36.$$

(積分公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\beta)(x-\alpha)\,dx=\frac{-(\beta-\alpha)^3}{6}$ より $\displaystyle\int_0^6 -x(x-6)\,dx=\frac{6^3}{6}=6^2=36$ でも可)

(2) $\dfrac{y+11}{x+6}=k$ とおく。このとき $y=kx+6k-11$. これは $(-6,-11)$ を通り，傾き k の直線を表す。この直線が放物線 $y=-x^2+4x$ に領域 A で接すれば，そのとき k が $\dfrac{y+11}{x+6}$ $((x,y)\in A)$ の最大値と予想される。

接するのは，$kx+6k-11=-x^2+4x$，すなわち $x^2+(k-4)x+6k-11=0$ の判別式 D がゼロのときであり

$D=(k-4)^2-4(6k-11)=k^2-32k+60=(k-2)(k-30)=0$ より

$k=2,\ 30$.

$k=2$ のとき，x 座標は $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ より $x=1$，このとき $y=3$.

接点は $(1,3)$ で，領域 A に属する。$k=30$ のとき，$x^2+26x+169$

$=(x+13)^2=0$ より $x=-13$，$y=-(13)^2-52=-221$. よって接点は A の外.

従って k の最大値は 2. 最小値は $(-6,-11)$ を通る直線が $(6,-12)$ を通るときで，

$k=-1/12$

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

問題 5 と問題 6 は選択問題ですので，どちらか１題を選択し，その解答は選択した問題の解答欄に記入してください。また選択しなかった問題の解答欄に「選択しない」と記入してください。

6　$f(x) = x\log(1+x)$ とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。以下の問に答えよ。

(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0, 0)$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3) 直線 $y = x$ と曲線 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

[解答欄]

(1) $f'(x) = \log(1+x) + x \cdot \frac{1}{1+x}$ より $f'(0) = \log 1 = 0$.

$(0,0)$ における接線は $y - 0 = 0(x-0)$ すなわち $y = 0$

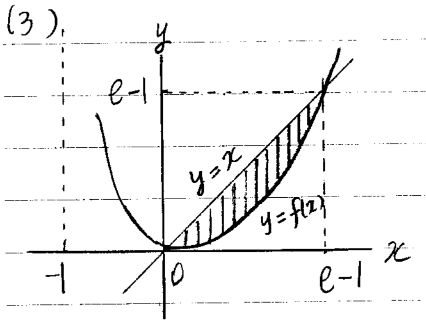
(2) $f(x)$ の定義域は $-1 < x$.

$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2} > 0 \ (-1 < x)$

x	-1		0	
$f''(x)$		$+$		$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(x)$ は $-1 < x \leqq 0$ で単調に減少し
$0 \leqq x$ で単調に増加する。
$x = 0$ で極小値 0 をとる。

(3)



$y = x$ と $y = x\log(1+x)$ の交点は
$x(1 - \log(1+x)) = 0$ より $x = 0$ および
$\log(1+x) = 1 \to x = e-1$

$$\int_0^{e-1} (x - x\log(1+x))\,dx = \int_0^{e-1} x(1 - \log(1+x))\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2}(1 - \log(1+x))\right]_0^{e-1}}_{=0} + \int_0^{e-1} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{(t-1)^2}{t}\,dt$$

$1+x = t$ とおくと
$dx = dt$

x	$0 \nearrow e-1$
t	$1 \nearrow e$

$$= \frac{1}{2}\int_1^e t - 2 + \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - 2t + \log t\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - 2e + 1 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{e^2}{4} - e + \frac{5}{4}$$

得点	